

**Paper Type: Original Article**

Investment Portfolio Optimization Using Conditional Value at Risk Under Fuzzy Credit Theory: A Case Study of the Dow Jones Industrial Average

Hossein Ghanbari¹, Ismael Taheripour¹, Emran Mohammadi^{1,*} 

¹ Department of Industrial Engineering, Faculty of Industrial Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran; h.ghanbari@iust.ac.ir; taheripour@iust.ac.ir; e_mohammadi@iust.ac.ir.

Citation:

Ghanbari, H., Taheripour, I., & Mohammadi, E. (2025). Investment portfolio optimization using conditional value at risk under fuzzy credit theory: A case study of the Dow Jones Industrial Average. *Management: Modeling, analysis and applications*, 2(3), 148-159.

Received: 15/11/2024

Reviewed: 29/01/2025

Revised: 09/03/2025

Accepted: 26/04/2025

Abstract

Purpose: This study aims to optimize investment portfolios by combining Conditional Value at Risk (CVaR) with fuzzy credibility theory to manage risk and uncertainty in financial markets.

Methodology: A mathematical model was developed using trapezoidal fuzzy numbers and practical constraints such as cardinality and investment bounds. The model was implemented and solved using General Algebraic Modeling System (GAMS) software with data from the Dow Jones Industrial Average (DJIA).

Findings: The results show that the proposed model can optimally allocate asset weights under different scenarios, consistently assigning the largest share to high-growth potential assets like NVIDIA (NVDA).

Originality/Value: The main contribution of this paper lies in integrating fuzzy credibility theory with the advanced CVaR metric while incorporating real-world market constraints, offering a novel and practical approach for decision-making under uncertainty.

Keywords: Portfolio optimization, Conditional value at risk, Fuzzy uncertainty, Credibility theory, New York Stock Exchange, Dow Jones Industrial Average.



Corresponding Author: e_mohammadi@iust.ac.ir

<https://doi.org/10.22105/mmaa.v2i3.96>

Licensee. **Management: Modeling, Analysis and Application**. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



۶

نوع مقاله: پژوهشی

بهینه سازی سبد سرمایه گذاری با استفاده از ارزش در معرض ریسک شرطی تحت نظریه اعتبار فازی: مطالعه موردی شاخص صنعتی داو جونز

حسین قنبری^۱، اسماعیل طاهری پور^۱، عمران محمدی^۱

^۱گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران.

چکیده

هدف: این پژوهش با هدف بهینه سازی سبد سرمایه گذاری با ترکیب «ارزش در معرض ریسک شرطی^۱» و «نظریه اعتبار فازی» برای مدیریت ریسک و عدم قطعیت در بازارهای مالی انجام شده است.

روش شناسی پژوهش: در این راستا، یک مدل ریاضی با استفاده از اعداد فازی دوزنقه ای و در نظر گرفتن محدودیت های عملیاتی مانند کاردینالیتی و سقف و کف برای سرمایه گذاری توسعه داده شد. این مدل با داده های شاخص داو جونز^۲ و با نرم افزار *GAMS*^۳ پیاده سازی و حل گردید.

یافته ها: نتایج حاکی از آن است که مدل پیشنهادی قادر به تخصیص بهینه وزن دارایی ها در شرایط مختلف است و سهم غالب را به دارایی های با پتانسیل رشد بالا (مانند *NVDA*) اختصاص می دهد.

اصالت/ارزش افزوده علمی: ارزش اصلی این مقاله در تلفیق نظریه اعتبار فازی با معیار پیشرفته *CVaR* و لحاظ کردن محدودیت های واقعی بازار است که رویکردی نوین و کاربردی برای تصمیم گیری در شرایط عدم قطعیت ارائه می دهد.

کلیدواژه ها: بهینه سازی سبد سرمایه گذاری، ارزش در معرض ریسک شرطی، عدم قطعیت فازی، نظریه اعتبار، بازار بورس نیویورک، شاخص صنعتی داو جونز.

۱- مقدمه

سرمایه گذاری یکی از اساسی ترین و تاثیرگذارترین ارکان هر اقتصاد است و به عنوان ابزاری برای رشد و توسعه در سطح کلان و خرد، نقشی حیاتی ایفا می کند. از دیدگاه کلان اقتصادی، سرمایه گذاری نه تنها به افزایش تولید و بهره وری منجر می شود، بلکه از عوامل اصلی توسعه زیرساخت ها، ایجاد اشتغال و بهبود شرایط اجتماعی است. به عبارتی دیگر، سرمایه گذاری می تواند محرکی برای رشد پایدار اقتصادی باشد که به طور مستقیم به بهبود سطح زندگی مردم و ارتقای رفاه اجتماعی منتهی می شود [1]. کشورهای توسعه یافته و در حال توسعه به این واقعیت پی برده اند که با جذب سرمایه گذاری داخلی و خارجی، می توانند به رشد اقتصادی مطلوبی دست یابند و در نتیجه، کشور را به سوی پیشرفت و شکوفایی سوق دهند. به همین دلیل، اهمیت سرمایه گذاری در تمام سطوح اقتصادی از سطح دولت ها گرفته تا سطح افراد، به طور فزاینده ای در حال افزایش است [2]. از سوی دیگر، از دیدگاه خرد، سرمایه گذاری به افراد این امکان را می دهد که با استفاده از منابع مالی خود، به افزایش ثروت و بهبود شرایط مالی دست یابند. این امر نه تنها به افراد کمک می کند تا پس انداز خود را به صورت موثر مدیریت کنند، بلکه باعث ایجاد فرصت های جدید برای کسب درآمد

¹ Conditional Value at Risk (CVaR)

² Dow Jones Industrial Average (DJIA)

³ General Algebraic Modeling System (GAMS)

و سرمایه‌گذاری‌های موفق می‌شود. در واقع، افراد با سرمایه‌گذاری در انواع مختلف ابزارهای مالی مانند سهام، اوراق بهادار، املاک و مستغلات، می‌توانند به بازدهی مطلوبی دست یابند و با استفاده از این فرصت‌ها به آینده مالی خود امید ببندند. از این رو، سرمایه‌گذاری برای بسیاری از افراد به‌عنوان یک استراتژی مالی ضروری در نظر گرفته می‌شود که می‌تواند در کوتاه‌مدت و بلندمدت به نتایج قابل‌توجهی منجر شود.

در دنیای امروز، با گسترش فناوری و دسترسی گسترده به اطلاعات، بازارهای مختلف مالی به‌طور قابل‌توجهی متنوع شده‌اند. از جمله این بازارها، بازار بورس نیویورک^۱ به‌عنوان یکی از جذاب‌ترین و پرمخاطب‌ترین بازارهای جهانی شناخته می‌شود. NYSE به دلیل حجم بالای معاملات، دسترسی آسان و انعطاف‌پذیری در معامله ارزهای مختلف، به‌ویژه برای کسانی که به دنبال فرصت‌های سریع و بلندمدت برای کسب سود هستند، جذابیت زیادی پیدا کرده است. این بازار به‌عنوان یکی از بزرگترین بازارهای مالی جهان، با ویژگی‌هایی چون نقدینگی بالا، توانایی معامله در طول شبانه‌روز و تنوع در ابزارهای مالی، فرصت‌های سرمایه‌گذاری فراوانی را برای افراد و مؤسسات فراهم می‌آورد. این ویژگی‌ها باعث می‌شود که NYSE به‌عنوان یک بستر ایده‌آل برای فعالان بازارهای مالی شناخته شود که می‌توانند با استفاده از تحلیل‌های فنی و بنیادی، به سودآوری در این بازار دست یابند. اگرچه NYSE و دیگر بازارهای مالی مشابه، فرصت‌های عظیمی برای سرمایه‌گذاری و کسب سود فراهم می‌آورند، اما نباید فراموش کرد که ریسک‌های زیادی نیز در این بازارها وجود دارد که ممکن است سرمایه‌گذاران را با ضررهای قابل‌توجهی روبه‌رو کند. نوسانات شدید قیمت‌ها، تغییرات ناگهانی در سیاست‌های مالی و اقتصادی کشورها، بحران‌های جهانی و حتی عوامل طبیعی می‌توانند بر قیمت‌ها و روند بازار تأثیرگذار باشند و موجب ضررهای قابل‌توجهی برای سرمایه‌گذاران شوند.

در این راستا، یکی از مهم‌ترین گام‌ها برای سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی، داشتن استراتژی‌های مناسب مدیریت ریسک و سرمایه‌گذاری است. استراتژی‌های متعددی در این زمینه وجود دارد که هر یک ویژگی‌ها و مزایای خاص خود را دارند، اما در میان آن‌ها، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری جزو بهترین و پرکاربردترین رویکردها شناخته می‌شود [3]، [4]. این رویکرد به‌طور خاص به هدف تخصیص بهینه منابع به دارایی‌های مختلف اشاره دارد تا با کاهش ریسک و افزایش بازده، سبد سرمایه‌گذاری به بهترین نحو ممکن عمل کند. این رویکرد ابتدا توسط هری مارکوویتز [5] مطرح شد که در آن مفهوم میانگین-واریانس به‌عنوان ابزاری نوین برای سنجش ریسک و بازده معرفی گردید. مارکوویتز با استفاده از این مدل، برای اولین بار واریانس را به‌عنوان سنج‌ای برای اندازه‌گیری ریسک در فرآیند بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری مطرح کرد. تا پیش از این، بسیاری از سرمایه‌گذاران و تحلیل‌گران، ریسک را صرفاً به‌عنوان نوسانات قیمتی دارایی‌ها در نظر می‌گرفتند، اما مارکوویتز با ارایه این مدل، نگاه جدیدی به ریسک و بازده در سرمایه‌گذاری‌ها آورد. این مدل به سرعت پس از ارایه، تحولی عظیم در دنیای سرمایه‌گذاری ایجاد کرد و پایه‌گذار تحولات علمی در حوزه بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری شد. پژوهشگران و معامله‌گران زیادی به این حوزه علاقه‌مند شدند و تلاش کردند تا این مفاهیم را گسترش دهند و بهبود بخشند. تحقیقات گسترده‌ای در این راستا انجام گرفت که هدف آن توسعه مدل‌هایی پیچیده‌تر و دقیق‌تر برای مدیریت ریسک و بازده بود. این پیشرفت‌ها به‌تدریج منجر به معرفی مدل‌های گوناگونی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از سنج‌های ریسک مختلف شد [6]. یکی از مدل‌ها در زمینه بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری که کاربرد فراوانی دارد، مدل CVaR [7]، [8] می‌باشد. این مدل به دلیل مزایای خاصی که دارد، یکی از محبوب‌ترین و معتبرترین رویکردها در دنیای مالی و سرمایه‌گذاری شناخته می‌شود. به‌طور خاص، این رویکرد قادر است ریسک‌های بالقوه را در شرایط شدیدتر و پیچیده‌تر بازار بهتر شبیه‌سازی کند و تحلیل دقیق‌تری از وضعیت ریسک در شرایط مختلف به سرمایه‌گذاران ارایه دهد. این مدل به‌ویژه در شرایطی که بازار نوسانات زیادی دارد یا بحران‌های اقتصادی به‌وجود می‌آید، می‌تواند به‌عنوان یک ابزار دقیق و قابل اعتماد برای سنجش ریسک استفاده شود. بنابراین، برای سرمایه‌گذاران حرفه‌ای که در جست‌وجوی استراتژی‌های مطمئن برای مدیریت ریسک و بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری خود هستند، مدل CVaR یکی از بهترین انتخاب‌ها به شمار می‌رود.

با توجه به تمام مزایایی که مدل‌های بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری دارند، نباید از عدم قطعیت موجود در بازارهای مالی غافل شد. این عدم قطعیت‌ها می‌توانند به‌طور قابل‌توجهی بر پیش‌بینی‌ها و تصمیمات سرمایه‌گذاری تأثیر بگذارند و موجب بروز خطاهای بزرگ در تحلیل ریسک‌ها و بازده‌ها شوند. عواملی همچون تغییرات ناگهانی در شرایط اقتصادی، بحران‌های مالی، نوسانات شدید بازار و سیاست‌های غیرقابل پیش‌بینی، به شدت بر مدل‌های بهینه‌سازی سبد تأثیر می‌گذارند و منجر به کاهش دقت پیش‌بینی‌ها و تحلیل‌های ریسک می‌شوند. به همین منظور، برای فایز آمدن به این چالش‌ها و مقابله با عدم قطعیت‌های موجود در بازار، پژوهشگران به دنبال استفاده از رویکردهای جدیدی هستند که قادر به مدیریت بهتر این عدم

¹New York Stock Exchange (NYSE)

قطعیت‌ها باشند. یکی از این رویکردها که به‌طور گسترده مورد توجه قرار گرفته، رویکرد فازی [9] است. این رویکرد به‌ویژه در شرایطی که اطلاعات دقیق و قطعی در دسترس نیست، به‌عنوان ابزاری مناسب برای مدل‌سازی و تحلیل به کار می‌رود. نظریه فازی امکان می‌دهد که ابهامات و عدم قطعیت‌ها در داده‌ها و تصمیمات را به‌طور موثری مدیریت کرده و نتایج بهینه‌تری به‌دست آورد. یکی از پیشرفت‌های اخیر در زمینه رویکردهای فازی، نظریه اعتبار فازی است که توسط لئو [10] معرفی شد و در کارهای بعدی [11] توسعه یافت. نظریه اعتبار فازی به‌ویژه در شرایطی که داده‌ها و اطلاعات دقیق و قطعی در دسترس نیست، به‌سرعت توانسته است محبوبیت زیادی در میان پژوهشگران و فعالان بازار پیدا کند. این رویکرد با تلفیق ابهام و عدم قطعیت به‌صورت کمی، امکان می‌دهد که تصمیم‌گیری‌های بهتری در زمینه‌های مختلف مالی و اقتصادی اتخاذ شود. در نظر گرفتن نظریه اعتبار فازی همراه با مدل $CVaR$ به‌عنوان یک سنج ریسک نامطلوب، می‌تواند مزایای هر دو رویکرد را ترکیب کرده و به سرمایه‌گذاران رویکردی جامع و کارآمد جهت سرمایه‌گذاری ارایه دهد. مدل $CVaR$ به‌خوبی قادر به ارزیابی ریسک‌های زیان‌آور در شرایط بحرانی است، در حالی که نظریه اعتبار فازی می‌تواند عدم قطعیت‌های موجود در داده‌ها و پیش‌بینی‌ها را به شکلی منطقی و معقول مدیریت کند. این ترکیب می‌تواند به سرمایه‌گذاران کمک کند تا با تحلیل‌های دقیق‌تر و بهتری به تصمیمات سرمایه‌گذاری خود بپردازند.

با وجود تمام مزایای این رویکرد ترکیبی، استفاده از آن در مدل‌های سرمایه‌گذاری کمتر در عمل پیاده‌سازی شده است. این مساله نشان‌دهنده پتانسیل عظیم برای پژوهش‌های بیشتر در این حوزه است. به همین منظور، در این پژوهش قصد داریم تا با استفاده از مدل $CVaR$ و با در نظر گرفتن نظریه اعتبار فازی، به تشکیل سبد سرمایه‌گذاری در $NYSE$ بپردازیم. این تحقیق به‌ویژه در نظر دارد تا با تحلیل داده‌های بازار، تاثیر استفاده از این رویکردهای ترکیبی را در بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری بررسی کند. با وجود تعداد بالای سهام موجود در $NYSE$ ، برای اطمینان از این‌که سرمایه‌گذاری در سهام‌های با پتانسیل بالا و مناسب انجام گیرد، در این پژوهش تنها سهام $DJIA$ جهت تحلیل و تست داده‌ها انتخاب شده است. این شاخص نمایانگر یک نمونه قوی از بازارهای سرمایه‌گذاری است و با استفاده از مدل پیشنهادی، سبد سرمایه‌گذاری بر اساس داده‌های این شاخص شکل خواهد گرفت تا ارزیابی دقیق‌تری از عملکرد این رویکرد در بازارهای واقعی انجام شود.

باقی بخش‌های پژوهش به صورت زیر ساختاردهی شده است: بخش ۲ به بررسی جامعی از مرور ادبیات پرداخته است و مفاهیم و مدل‌های مرتبط با حوزه تحت مرور را مورد بررسی قرار می‌دهد. در بخش ۳، مدل پیشنهادی به‌طور کامل ارایه می‌شود و فرآیندهای ریاضی و منطقی مرتبط با استفاده از مدل $CVaR$ و نظریه اعتبار فازی تشریح خواهد شد. سپس در بخش ۴، نتایج حاصل از اجرای مدل بر روی داده‌های مربوط به $DJIA$ شرح داده می‌شود و به تحلیل و بررسی دقیق نتایج پرداخته خواهد شد. بخش ۵ به بحث و بینش‌های مدیریتی اختصاص دارد که به تحلیل نتایج از منظر تصمیم‌گیری‌های مدیریتی و استراتژیک پرداخته و پیشنهاداتی برای بهبود فرآیندهای سرمایه‌گذاری ارایه خواهد کرد. در نهایت، و در بخش ۶، جمع‌بندی کلی از پژوهش صورت خواهد گرفت و نتیجه‌گیری‌ها به همراه پیشنهادهای آتی برای تحقیقات بیشتر در این زمینه مطرح می‌شود.

۲- مروری بر پیشینه پژوهش

بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری فازی در سال‌های اخیر توجه فراوانی را در جوامع علمی و صنعتی به خود جلب کرده است، چرا که این رویکرد قادر است به‌طور موثر عدم قطعیت و ابهام‌های موجود در بازارهای مالی را مدیریت کند. در دنیای پیچیده و پویا امروز، جایی که بازارهای مالی تحت تاثیر عوامل مختلف اقتصادی، سیاسی و اجتماعی قرار دارند، استفاده از مدل‌های دقیق و پیچیده‌تر برای پیش‌بینی رفتار بازار و مدیریت ریسک ضروری است. در این راستا، نظریه اعتبار به‌عنوان یک ابزار نوین و کارآمد شناخته می‌شود که با بهره‌گیری از منطق فازی، توانسته است به‌طور موثری اطلاعات نامطمئن و مبهم را مدل‌سازی و مدیریت کند. این رویکرد به‌ویژه در شرایطی که داده‌های تاریخی دقیق یا کامل در دسترس نیستند، می‌تواند به‌عنوان راهکاری موثر برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری عمل کند. پژوهشگران مختلف در این حوزه به بررسی جنبه‌های متنوع و کاربردهای مختلف این رویکرد پرداخته‌اند. در همین راستا، این مرور ادبیات به‌طور جامع به بررسی کاربرد نظریه اعتبار در بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری پرداخته و تمامی جنبه‌های آن را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهد. در این بررسی، به روش‌ها، پیشرفت‌های اخیر و یافته‌های تجربی کلیدی که در این زمینه نوظهور به دست آمده است، پرداخته می‌شود.

محبی و نجفی [12] مدل بهینه‌سازی سبد فازی چنددوره‌ای را توسعه دادند که در آن، نظریه اعتبار با تحلیل درخت سناریو ترکیب شده است تا بتواند به‌طور موثری عدم قطعیت‌های بازار را مدیریت کند. این تحقیق از مدل ارزش در معرض ریسک^۱ دودهنه برای بهینه‌سازی سبدهای سرمایه‌گذاری استفاده کرده و به‌طور هم‌زمان هزینه‌های معامله و سرمایه‌گذاری بدون ریسک را در نظر می‌گیرد. این مدل با در نظر گرفتن محدودیت‌های واقعی، ابزار مناسبی برای حل مسایل بهینه‌سازی سرمایه‌گذاری در شرایط مختلف ارائه می‌دهد. همچنین، در این تحقیق استفاده از روش برنامه‌ریزی پویا به حل این مساله با درجه پیچیدگی بالا جهت به‌دست آوردن راه‌حل‌های عملی کمک می‌کند. هدف از این مدل ارائه یک راه‌حل عملی و قابل اعتماد برای سرمایه‌گذاران است تا بتوانند عدم قطعیت‌های بازارهای مالی را با استفاده از نظریه مجموعه فازی و تحلیل سناریوها مدیریت کنند.

دنگ و همکاران [13] یک مدل سبد بهینه‌سازی فازی مبتنی بر نظریه اعتبار و هزینه‌های معامله معرفی کردند که به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد تا ریسک‌ها را به‌طور دقیق‌تری اندازه‌گیری کرده و انتخاب سبد را بهینه کنند. در این مطالعه، انتروپی به‌عنوان معیاری موثرتر برای اندازه‌گیری ریسک معرفی می‌شود که نسبت به واریانس مزیت‌هایی در بازارهای مالی فازی دارد. این مدل به‌ویژه در شرایطی که عدم قطعیت‌های زیاد و اطلاعات ناکافی در بازار وجود دارد، قابل استفاده است. نویسندگان همچنین با انجام تحلیل حساسیت بررسی کرده‌اند که چگونه تغییرات در پارامترهای مدل می‌تواند بر نتایج بهینه تاثیر بگذارد. هدف این مدل ارائه یک راه‌حل مقاوم برای سرمایه‌گذاران است که بتوانند با در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی، به بهینه‌سازی پایدارتر سبد سرمایه‌گذاری در شرایط مالی نامطمئن دست یابند.

گپتا و همکاران [14] مدل بهینه‌سازی سبد چنددوره‌ای را با استفاده از اعداد فازی منسجم و نظریه اعتبار فازی پیشنهاد کردند. این مدل به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که انعطاف‌پذیری بیشتری در تعیین تحمل ریسک خود داشته باشند. مدل پیشنهادی به‌طور موثری محدودیت‌های مختلف دنیای واقعی مانند کاردینالیتی، چولگی و هزینه‌های معاملاتی را در نظر می‌گیرد تا برنامه‌های سرمایه‌گذاری را در افق‌های زمانی مختلف بهینه کند. مقاله همچنین موثریت مدل را از طریق مطالعات موردی واقعی با استفاده از دارایی‌های بازار بورس ملی هند و شاخص‌های بورس عمده آمریکا نشان می‌دهد و از این طریق قابلیت‌های عملی این مدل را تایید می‌کند.

مهلاوات و همکاران [15] نیز یک مدل بهینه‌سازی سبد چنددوره‌ای را پیشنهاد کردند که از اعداد فازی منسجم و نظریه اعتبار فازی استفاده می‌کند. این مدل به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که نگرش‌های خود (بدبینانه، خوشبینانه یا خنثی) را در برابر بازارهای مالی گنجانده و از یک تابع اعتبار جدید بهره‌مند شوند. در این مطالعه، مدل سنتی میانگین واریانس سنتی با میانگین نیم انحراف معیار مطلق به‌عنوان معیاری واقعی‌تر برای ریسک جایگزین می‌شود و از چولگی برای ثبت عدم تقارن بازده‌ها استفاده می‌کند. مقاله اثربخشی این رویکرد را با استفاده از مثال‌های عددی و الگوریتم ژنتیکی نشان می‌دهد و به‌طور خاص به سرمایه‌گذاران امکان می‌دهد که ترجیحات خود را در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری و ارزیابی عدم قطعیت‌های بازار به‌طور دقیق‌تر مدل‌سازی کنند.

لیو و همکاران [16] یک مدل نوین بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری مبتنی بر نظریه اعتبار فازی برای مدیریت ریسک‌های بازار ناشی از نوسانات قیمت دارایی‌های مالی معرفی کردند. این مدل در تلاش است تا محدودیت‌های مدل‌های سنتی میانگین-واریانس را با در نظر گرفتن *CVaR* به عنوان سنجی ریسک گسترش دهد. این رویکرد به دلیل قابلیت بهتری که در شبیه‌سازی ریسک‌های نزولی دارد، از سایر روش‌های مشابه متمایز می‌شود. به‌طور خاص، مدل پیشنهادی به‌گونه‌ای طراحی شده که قادر است حرکات نامطلوب نزولی بازار را از حرکات صعودی مطلوب تفکیک کند و در نتیجه ابزاری موثرتر و دقیق‌تر برای مدیریت ریسک در اختیار سرمایه‌گذاران قرار دهد. علاوه بر این، این مقاله مزایای محاسباتی مدل پیشنهادی را با حل آن از طریق تکنیک‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط به‌طور ملموس نشان می‌دهد که به‌طور خاص مزایای عملی این مدل را در حل مسایل پیچیده به وضوح نمایان می‌سازد.

با وجود تمام مزایای قابل توجهی که در حوزه بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از نظریه اعتبار فازی و مدل‌های ریسک پیشرفته وجود دارد، باید گفت که هنوز تحقیقات پراکنده‌ای در این زمینه انجام شده و بسیاری از جنبه‌های این حوزه هنوز به‌طور کامل مورد بررسی قرار نگرفته است. این مساله نشان‌دهنده وجود پتانسیل بالایی تحقیقاتی و فرصتی بزرگ برای گسترش تحقیقات در این حوزه است. به‌ویژه، با توجه به پیشرفت‌های اخیر در مدل‌های فازی و نظریه اعتبار فازی، همچنان جایی برای تکمیل و بهبود این مدل‌ها در شرایط واقعی بازارهای مالی وجود دارد. به همین

¹ Value at Risk (VaR)

منظور، در این پژوهش قصد داریم با استفاده از مدل $CVaR$ و با در نظر گرفتن نظریه اعتبار فازی به عنوان یک رویکرد نوین در مدیریت ریسک، به تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بپردازیم. این تحقیق تلاش دارد تا از ترکیب این دو رویکرد برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن ریسک‌های احتمالی و شرایط بازار استفاده کند. علاوه بر این، برای آن‌که مدل پیشنهادی به شرایط واقعی سرمایه‌گذاری نزدیک‌تر باشد، محدودیت‌هایی نظیر محدودیت کاردینالیتی و سقف و کف در نظر گرفته خواهد شد. این محدودیت‌ها به سرمایه‌گذاران کمک می‌کند تا ترکیب دارایی‌ها را در چارچوب منطقی و عملیاتی بهینه کنند و ریسک‌ها و بازده‌ها را در شرایط واقعی بازار به طور موثری مدیریت نمایند.

۳- مدل‌سازی ریاضی

در این بخش از پژوهش، به مدل‌سازی ریاضی تحقیق پرداخته می‌شود. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، در این مطالعه، مدل $CVaR$ و نظریه اعتبار فازی به عنوان رویکرد نوینی در مدیریت ریسک مورد استفاده قرار می‌گیرد. به منظور مدل‌سازی دقیق‌تر و انعطاف‌پذیرتر، در این تحقیق از متغیر فازی دوزنقه‌ای برای مدل‌سازی استفاده خواهد شد. این انتخاب به‌ویژه در مواقعی که داده‌ها و اطلاعات موجود از عدم قطعیت‌های فازی برخوردار هستند، می‌تواند موثر و کاربردی باشد. علاوه بر این، برای آن‌که مدل پیشنهادی به شرایط واقعی سرمایه‌گذاری نزدیک‌تر باشد، محدودیت‌هایی نظیر محدودیت کاردینالیتی و سقف و کف در نظر گرفته می‌شود. این محدودیت‌ها به سرمایه‌گذاران کمک می‌کند تا سبد سرمایه‌گذاری خود را با در نظر گرفتن شرایط بازار و نیازهای عملیاتی بهینه‌سازی کنند.

در این بخش، ابتدا به توضیح و تجزیه و تحلیل $CVaR$ پرداخته می‌شود و روابط ریاضی مربوط به آن به طور کامل شرح داده خواهد شد. سپس، مدل‌سازی ریاضی این مدل با در نظر گرفتن نظریه اعتبار فازی مبتنی بر اعداد فازی دوزنقه‌ای تشریح می‌شود. در ادامه، محدودیت‌های کاربردی مطالعه مورد بررسی قرار می‌گیرد و برای درک بهتر تاثیر این محدودیت‌ها بر مدل، آن‌ها به طور دقیق توصیف می‌شوند. در نهایت، مدل نهایی این پژوهش با در نظر گرفتن تمام موارد ذکر شده، به طور کامل شرح داده می‌شود. این مدل نهایی به سرمایه‌گذاران کمک می‌کند تا سبد سرمایه‌گذاری خود را به طور بهینه و با مدیریت ریسک موثر بهینه‌سازی کنند.

۳-۱- $CVaR$

یکی از اهداف اصلی در مدیریت ریسک مالی، ارزیابی دقیق و بهبود عملکرد سرمایه‌گذاری‌های مالی از طریق تحلیل جامع ریسک‌های مرتبط با تولید سود است. به عبارت دیگر، سرمایه‌گذاران و مدیران مالی باید بتوانند به طور موثر ریسک‌های موجود در فرآیند سرمایه‌گذاری را شناسایی کرده و اقداماتی به منظور کاهش آن‌ها انجام دهند. یکی از رایج‌ترین و متداول‌ترین روش‌ها برای اندازه‌گیری این ریسک‌ها، Var می‌باشد که به عنوان ابزاری استاندارد برای برآورد خسارات بالقوه در بازارهای مالی شناخته شده است. Var به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که بیشترین زیان ممکن در یک بازه زمانی مشخص و با یک سطح اطمینان مشخص را برآورد کنند. این روش به‌ویژه در بازارهایی که دارای نوسانات قابل توجه هستند، کاربرد زیادی دارد. با این حال، علی‌رغم استفاده گسترده از Var ، این روش دارای محدودیت‌های قابل توجهی است که می‌تواند دقت پیش‌بینی‌های ریسک را تحت تاثیر قرار دهد. یکی از بزرگترین محدودیت‌های Var ، ناتوانی آن در درک زیان‌های نادری است که در شرایط بحرانی و بازارهای نامساعد ممکن است رخ دهند. به عبارت دیگر، Var نمی‌تواند به طور کافی ریسک‌های شدید و نادر را که در انتهای توزیع زیان‌ها قرار دارند، شبیه‌سازی کند. این معضل باعث می‌شود که Var نتواند تمامی ابعاد ریسک را به درستی پوشش دهد. در پی این کاستی‌ها، $CVaR$ به عنوان یک ابزار ارزیابی ریسک پیشرفته‌تر و جامع‌تر معرفی شده است. $CVaR$ نه تنها قادر است ریسک‌ها را در سطح Var اندازه‌گیری کند، بلکه بر زیان‌های احتمالی تمرکز دارد که از آستانه Var فراتر می‌روند و شامل ریسک‌های شدید و نادر در انتهای توزیع زیان‌ها می‌شود. به این ترتیب، $CVaR$ درک دقیق‌تری از ریسک‌های پنهان و کمتر پیش‌بینی شده در شرایط بحرانی ارائه می‌دهد. با استفاده از این رویکرد، تصمیم‌گیرندگان قادر خواهند بود که ریسک‌های مرتبط با زیان‌های شدید و غیرمنتظره را بهتر شبیه‌سازی کرده و برای کاهش این ریسک‌ها استراتژی‌های بهتری طراحی کنند. به عبارت دیگر، $CVaR$ به مدیران مالی این امکان را می‌دهد که ریسک‌هایی را شبیه‌سازی کنند که به طور معمول در چارچوب‌های سنتی مدیریت ریسک نادیده گرفته می‌شوند. از نظر ریاضی، $CVaR$ یک متغیر تصادفی ξ در سطح اطمینان α را به صورت زیر می‌توان نمایش داد:

$$CVaR(x, \eta) = \eta + (1 - \alpha)^{-1} \int_{\xi \in R^n} [f(X, \xi) - \eta]^+ p(\xi) d\xi. \quad (1)$$

در معادله فوق، عبارت $[f(X, \xi) - \eta]^+$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[f(X, \xi) - \eta]^+ \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(X, \xi) - \eta, & \text{if } f(X, \xi) - \eta > 0, \\ 0, & \text{if } f(X, \xi) - \eta \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

در روابط فوق، η نمایانگر آستانه Var ، α سطح اطمینان، $f(X, \xi)$ تابع زیان و $p(\xi)$ تابع چگالی احتمال برای ξ می‌باشند. این رابطه از تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه کارآمد $CVaR$ استفاده می‌کند و آن را برای سناریوهای بهینه‌سازی مالی که در آن درک و مدیریت ریسک اهمیت زیادی دارد، بسیار کاربردی می‌سازد.

۳-۲- CVaR تحت نظریه اعتبار فازی

همان‌طور که اشاره شد، ادغام نظریه اعتبار در محاسبه $CVaR$ رویکردی بسیار منعطف‌تر و دقیق‌تر برای مدیریت عدم قطعیت در ارزیابی ریسک‌ها ارائه می‌دهد. نظریه اعتبار به‌ویژه در شرایطی که داده‌ها فازی، نامشخص یا ناقص هستند، یک ابزار بسیار ارزشمند به حساب می‌آید. این نظریه به‌عنوان یک جایگزین قوی برای روش‌های سنتی مبتنی بر احتمال عمل می‌کند و با استفاده از این چارچوب، می‌توان اطلاعات مبهم و غیرقطعی را به‌طور موثری مدل‌سازی و مدیریت کرد. در نتیجه، نظریه اعتبار به سرمایه‌گذاران و تحلیل‌گران این امکان را می‌دهد که عدم قطعیت‌های ذاتی موجود در ارزیابی‌های ریسک خود را بهتر شبیه‌سازی کرده و تصمیمات بهینه‌تری اتخاذ کنند.

از این جهت که $CVaR$ تحت نظریه اعتبار می‌تواند به‌طور مستقیم از Var تحت نظریه اعتبار استخراج شود. بنابراین، ابتدا لازم است که این مفهوم به‌طور دقیق معرفی شود تا فرآیند استخراج و محاسبه $CVaR$ تحت نظریه اعتبار تسهیل گردد. این فرآیند نه‌تنها امکان تحلیل دقیق‌تر ریسک‌ها را فراهم می‌آورد، بلکه به‌طور موثری ریسک‌های غیرقابل پیش‌بینی را که ممکن است در شرایط بحرانی بازار رخ دهند، پوشش می‌دهد. برای یک متغیر فازی ξ و یک سطح اطمینان $\alpha \in (0, 1]$ ، Var در چارچوب نظریه اعتبار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_{Var}(\alpha) = -\sup\{x \mid Cr\{\xi \leq x\} \leq \alpha\}. \quad (3)$$

این رابطه به محاسبه x می‌پردازد که برای آن اندازه اعتبار $Cr\{\xi \leq x\}$ کوچک‌تر مساوی با سطح اطمینان مشخص α باشد. در واقع، این یک معادل فازی برای Var سنتی است که مفهوم آن را به‌گونه‌ای تطبیق می‌دهد که با مدیریت عدم قطعیت و نامشخص بودن داده‌های فازی سازگار شود. به این ترتیب، این روش امکان می‌دهد که ریسک‌ها و زیان‌ها به‌طور دقیق‌تر و با در نظر گرفتن درجه اعتبار داده‌ها ارزیابی شوند. علاوه بر این، فرمولاسیون دیگری برای Var در چارچوب نظریه اعتبار وجود دارد که می‌تواند به تحلیل‌های پیچیده‌تر و دقیق‌تر در زمینه ارزیابی ریسک کمک کند که به صورت ذیل قابل نمایش می‌باشد:

$$\xi_{Var}(\alpha) = -\inf\{x \mid Cr\{\xi \leq x\} \geq \alpha\} = -\inf\{x \mid \Phi(x) \geq \alpha\} = -\Phi^{-1}(\alpha), \quad (4)$$

که در رابطه فوق، عبارت $\Phi(x)$ نمایانگر تابع توزیع تجمعی اعتبار^۱ می‌باشد. با در نظر گرفتن این مساله، Var در چارچوب نظریه اعتبار برای یک متغیر فازی دوزنقه‌ای که با پارامترهای $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و سطح اطمینان $\alpha \in (0, 1]$ مشخص شده است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\xi_{Var}(\alpha) = \begin{cases} 2(a_1 - a_2)\alpha - a_1, & \alpha \in (0, 0.5], \\ 2(a_3 - a_4)\alpha + a_4 - 2a_3, & \alpha \in (0.5, 1]. \end{cases} \quad (5)$$

$CVaR$ در چارچوب نظریه اعتبار که با ξ_{CVaR} نمایش داده می‌شود، از طریق انتگرال تابع ξ_{Var} در بازه سطح اطمینان α استخراج می‌شود که به صورت رابطه (۶) قابل نمایش می‌باشد.

$$\xi_{CVaR} = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 \xi_{Var}(r) dr. \quad (6)$$

¹ Cumulative credibility distribution function

با در نظر گرفتن رابطه های (۵) و (۶)، $CVaR$ در چارچوب نظریه اعتبار برای یک متغیر فازی ذوزنقه ای که با پارامترهای (a_1, a_2, a_3, a_4) ξ و سطح اطمینان $\alpha \in (0, 1]$ مشخص شده است، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\xi_{CVaR}(\alpha) = \begin{cases} \alpha a_1 - (1 + \alpha)a_2, & \alpha \in (0, 0.5], \\ (\alpha - 1)a_3 - \alpha a_4, & \alpha \in (0.5, 1]. \end{cases} \quad (7)$$

در رابطه های (۴) و (۶) برای محاسبه مقادیر $\xi_{CVaR}(\alpha)$ و $\xi_{VaR}(\alpha)$ بسته به این که مقدار α بیشتر از ۰/۵ می باشد یا کمتر، تصمیم گیری در مورد انتخاب عبارت اول یا دوم انجام می شود. این انتخاب بر اساس موقعیت سطح اطمینان α در بازه $(0, 1]$ صورت می گیرد.

۳-۳- محدودیت های کاربردی

در مدل سازی یک سبد سرمایه گذاری کاربردی، به منظور دستیابی به نتایج دقیق تر و کارآمدتر، تنها در نظر گرفتن ریسک و بازده کافی نیست. سرمایه گذاران معمولاً با جنبه های مختلف دیگری نیز درگیر هستند که می تواند تاثیر زیادی بر تصمیمات آن ها در خصوص ترکیب دارایی ها و تخصیص منابع داشته باشد. این جنبه ها ممکن است شامل محدودیت های عملیاتی، اهداف خاص مالی، آستانه های ریسک، و اولویت های فردی باشند که همگی نقش مهمی در تخصیص بهینه منابع و تصمیم گیری های مالی دارند. از این رو، برای آن که مدل ریاضی به دنیای واقعی و پیچیدگی های آن نزدیک تر شود و نتایج حاصل از آن بتواند به طور موثری در فرآیند تصمیم گیری استفاده شود، باید تمام این عوامل را در نظر گرفت. به طور خاص، در مسایل بهینه سازی سبد سرمایه گذاری، محدودیت ها و شرایط مختلفی وجود دارند که باید در مدل لحاظ شوند. این محدودیت ها می توانند به عنوان ابزاری برای بهینه سازی تخصیص منابع و کاهش ریسک های احتمالی در نظر گرفته شوند. در بسیاری از مواقع، این محدودیت ها شامل محدودیت های قانونی یا محدودیت های عملیاتی نظیر حداقل یا حداکثر میزان سرمایه گذاری در یک دارایی خاص، تعداد دارایی های قابل انتخاب برای سبد و یا محدودیت های مربوط به تنوع سبد هستند. به همین دلیل، در این مطالعه، به منظور افزایش دقت مدل و نزدیک تر کردن آن به شرایط واقعی بازار، محدودیت هایی نظیر محدودیت کاردینالیتی و محدودیت سقف و کف در مدل پیشنهادی گنجانده شده اند. در ادامه روابط ریاضی مربوط به این دو محدودیت به طور کامل شرح داده است:

۳-۳-۱ محدودیت کاردینالیتی

محدودیت کاردینالیتی به عنوان یکی از مهم ترین محدودیت ها در مدل سازی سبد سرمایه گذاری، تعداد دارایی های موجود در یک سبد سرمایه گذاری را محدود می کند. به عبارت دیگر، این محدودیت مشخص می کند که تعداد دارایی هایی که می توانند در سبد انتخاب شوند، چه مقدار باید باشد. این موضوع از آن جهت اهمیت دارد که انتخاب بیش از حد دارایی ها در سبد سرمایه گذاری ممکن است منجر به پراکنده شدن بیش از حد سرمایه و کاهش اثربخشی آن در دستیابی به بازده مورد انتظار شود. همچنین، از طرف دیگر، انتخاب تعداد کمی از دارایی ها ممکن است ریسک سرمایه گذاری را افزایش دهد و تنوع کافی را فراهم نکند. وضعیت انتخاب هر دارایی در این محدودیت با استفاده از یک متغیر باینری Z_i نشان داده می شود. به این صورت که اگر دارایی i در سبد سرمایه گذاری انتخاب شود، مقدار $Z_i = 1$ و اگر انتخاب نشود، مقدار $Z_i = 0$ خواهد بود. این متغیر باینری به طور ساده وضعیت حضور یا عدم حضور هر دارایی در سبد را مشخص می کند. این محدودیت به طور ریاضی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\sum_{i=1}^N Z_i = K. \quad (8)$$

$$Z_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

که در این معادله، عبارت K تعداد دارایی های مجاز در سبد سرمایه گذاری را مشخص می کند. این معادله به این معنا است که تعداد کل دارایی های انتخاب شده باید برابر با مقدار تعیین شده K باشد.

۳-۳-۲- محدودیت سقف و کف

محدودیت سقف و کف به‌طور خاص حداقل و حداکثر مقادیر سرمایه‌گذاری برای هر دارایی در سبد سرمایه‌گذاری را تعیین می‌کنند. این محدودیت‌ها به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهند که میزان سرمایه‌گذاری خود را در هر دارایی به‌طور دقیق‌تری کنترل کرده و از تخصیص غیرمنطقی و نادرست منابع جلوگیری کنند. به عنوان مثال، ممکن است یک سرمایه‌گذار بخواهد که بیش از ۵۰٪ از سرمایه خود را در یک دارایی خاص سرمایه‌گذاری نکند یا از حداقل میزان سرمایه‌گذاری در یک دارایی خاص برخوردار باشد. محدودیت سقف تعیین می‌کند که حداکثر مقدار سرمایه‌گذاری برای هر دارایی چقدر باشد، در حالی که محدودیت کف مقدار حداقل سرمایه‌گذاری را برای هر دارایی مشخص می‌کند. این محدودیت‌ها به‌ویژه در استراتژی‌های مدیریت ریسک و تنوع سرمایه‌گذاری اهمیت زیادی دارند، زیرا سرمایه‌گذار را از تمرکز بیش از حد بر یک دارایی خاص یا عدم تنوع مناسب در سبد سرمایه‌گذاری محافظت می‌کنند. این محدودیت‌ها به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$l_i Z_i \leq x_i \leq u_i Z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

$$0 \leq l_i \leq u_i \leq 1. \quad (11)$$

در این جا، عبارات l_i و u_i به ترتیب حداقل و حداکثر مقادیر سرمایه‌گذاری برای دارایی i را مشخص می‌کنند. این مقادیر می‌توانند بسته به شرایط بازار، استراتژی سرمایه‌گذاری و اهداف خاص سرمایه‌گذار تنظیم شوند.

۳-۴- ساختار نهایی مدل پیشنهادی

بر اساس تمام روابط و مباحث ارائه‌شده، این بخش به‌طور جامع و مفصل ساختار نهایی مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری پیشنهادی را معرفی می‌کند. این پژوهش از $CVaR$ در چارچوب نظریه اعتبار بهره می‌برد که با استفاده از متغیرهای فازی دوزنقه‌ای، توانایی مدل را در مدیریت عدم قطعیت و ابهام‌های موجود در بازده دارایی‌ها به‌طور چشمگیری بهبود می‌بخشد. مدل پیشنهادی شامل محدودیت‌های کاردینالیتی و سقف و کف می‌باشد که برای اطمینان از داشتن یک استراتژی سرمایه‌گذاری متعادل و واقع‌بینانه بسیار ضروری است. علاوه بر این، مدل پیشنهادی سطح اطمینان را به بازه $\alpha \in (0, 0.5]$ محدود می‌کند، که این کار به‌طور طبیعی باعث می‌شود که ارزیابی ریسک به‌صورت محافظه‌کارانه انجام شود. این رویکرد محافظه‌کارانه نه تنها به کاهش زیان‌های احتمالی در شرایط بحرانی کمک می‌کند، بلکه با تقویت پایداری سبد، امکان اتخاذ تصمیمات سرمایه‌گذاری آگاهانه‌تر و کاهش ریسک‌های غیرمنتظره را فراهم می‌آورد. ساختار نهایی مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری پیشنهادی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Min } CVaR = \sum_{i=1}^n x_i [\alpha a_{1i} - (1 + \alpha) a_{2i}]. \quad (12)$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{a_{1i} + a_{2i} + a_{3i} + a_{4i}}{4} \geq R. \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1. \quad (14)$$

$$l_i Z_i \leq x_i \leq u_i Z_i. \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i = K. \quad (16)$$

$$Z_i = \{0, 1\}. \quad (17)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

در این رابطه، معادله (۱۲) هدف اصلی مدل را تعیین می‌کند که به حداقل رساندن مقدار $CVaR$ تحت نظریه اعتبار می‌باشد. این هدف، به طور خاص، به کاهش ریسک‌های شدید و نادر که می‌توانند بر عملکرد سبد تاثیر بگذارند، می‌پردازد. معادله (۱۳) یک محدودیت بازده مورد انتظار را معرفی می‌کند که اطمینان می‌دهد سبد سرمایه‌گذاری حداقل بازده مورد نیاز R را محقق می‌کند. این محدودیت تضمین می‌کند که سرمایه‌گذار علاوه بر کاهش ریسک، به اهداف مالی خود و بازده مورد انتظار دست یابد. به این ترتیب، تعادلی حیاتی میان ریسک و بازده ایجاد می‌شود که به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که در حین تلاش برای کسب سود، ریسک‌های بالقوه را نیز مدیریت کنند. معادله (۱۴) این رابطه نیز محدودیت بودجه را تعریف می‌کند که اطمینان می‌دهد تمام منابع مالی به طور کامل در دارایی‌های انتخابی تخصیص داده شده است. این محدودیت از باقی ماندن هر بخش از بودجه بدون تخصیص جلوگیری می‌کند و باعث می‌شود که تخصیص منابع به طور بهینه و به شکلی منظم صورت گیرد. معادله (۱۵) به طور خاص به محدودیت‌های سقف و کف می‌پردازد که تعیین می‌کنند هر دارایی در سبد سرمایه‌گذاری باید حداقل و حداکثر چه میزان از کل سرمایه‌گذاری را تشکیل دهد. این مکانیزم از تمرکز بیش از حد بر یک دارایی خاص جلوگیری کرده و اطمینان می‌دهد که تخصیص‌های دارایی‌ها به آستانه‌های مشخص شده برای حداقل و حداکثر تخصیص پایبند باشند. علاوه بر این، معادله (۱۶) محدودیت کاردینالیتی را توصیف می‌کند که تعداد دارایی‌های موجود در سبد را به دقیقاً K دارایی محدود می‌کند. این محدودیت به سرمایه‌گذاران کمک می‌کند تا از هزینه‌های معامله بالا و حجم سبد غیرمنطقی جلوگیری کنند و اندازه سبد را در حدی کارآمد و قابل مدیریت نگه دارند. در نهایت، معادله‌های (۱۷) و (۱۸) محدودیت‌های باینری و غیرمنفی بودن را اعمال می‌کنند.

مدل بهینه‌سازی سبد پیشنهادی، با گنجاندن تمامی این محدودیت‌ها و ویژگی‌ها، به طور جامع و دقیق می‌تواند ریسک و بازده را در شرایط واقعی و پیچیده بازار مدیریت کند. این مدل به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که تصمیمات بهینه‌تری در انتخاب دارایی‌ها و تخصیص منابع اتخاذ کنند، به طوری که نه تنها به اهداف بازدهی خود دست یابند، بلکه ریسک‌ها را نیز در سطوح قابل قبول و معقول مدیریت کنند.

۴- تجزیه و تحلیل نتایج

همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، در این پژوهش از مدل $CVaR$ تحت نظریه اعتبار فازی برای تشکیل سبد سرمایه‌گذاری استفاده می‌شود. همچنین برای افزایش دقت مدل و کاربرد آن در شرایط واقعی، از محدودیت‌های کاربردی مانند محدودیت‌های کاردینالیتی و سقف و کف نیز در این مدل بهره‌برداری شده است تا تمامی جنبه‌های عملیاتی و استراتژیک در نظر گرفته شوند و نتایج به دست آمده از آن واقع‌بینانه‌تر و کاربردی‌تر باشند. مدل نهایی که در این مطالعه توسعه یافته، بر سهام شرکت‌های داو جونز پیاده‌سازی می‌شود. $DJIA$ یکی از معروف‌ترین و معتبرترین شاخص‌های بورس ایالات متحده است که شامل ۳۰ شرکت بزرگ و تاثیرگذار می‌شود. این شرکت‌ها نمایانگر وضعیت اقتصادی و صنعتی ایالات متحده هستند و به طور کلی از صنایع مختلفی مانند فناوری، انرژی، بهداشت، مالی، و مصرف‌کننده تشکیل شده‌اند. به دلیل تنوع و تاثیر این شرکت‌ها بر اقتصاد کلان، انتخاب آن‌ها برای تحلیل و تشکیل سبد سرمایه‌گذاری بسیار مناسب است و می‌تواند تصویر دقیقی از ریسک‌ها و فرصت‌های موجود در بازار ارایه دهد. برای محاسبه و تشکیل سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از مدل پیشنهادی، اولین گام تعیین ورودی‌های فازی است که به طور مستقیم بر دقت و صحت تحلیل‌ها تاثیر می‌گذارد. در این مطالعه، برای برآورد عدم قطعیت و ارزیابی ریسک‌های احتمالی، از اعداد فازی دوزنقه‌ای استفاده شده است. این انتخاب به ویژه در شرایطی که داده‌ها ممکن است ناقص یا غیرقطعی باشند، موثر است زیرا اعداد فازی دوزنقه‌ای قادرند عدم قطعیت و ابهام‌های موجود در داده‌ها را به طور دقیق‌تر و موثرتری مدل‌سازی کنند. داده‌های فازی دوزنقه‌ای مربوط به این ۳۰ شرکت داو جونز در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند. این داده‌ها از طریق خبرگان بازار سرمایه جمع‌آوری شده‌اند و به طور خاص، با استفاده از داده‌های تاریخی سال ۲۰۲۴ برآورد شده‌اند. این انتخاب تاریخ به منظور ارزیابی بهتر شرایط اقتصادی و ریسک‌های بازار در سال‌های اخیر بوده است. از آنجا که شرایط بازار همواره در حال تغییر است و تحت تاثیر عوامل مختلف اقتصادی و سیاسی قرار دارد، استفاده از داده‌های به روز و تاریخی می‌تواند تحلیل‌های دقیق‌تر و شبیه‌سازی‌های بهتری از شرایط آینده فراهم آورد.

جدول ۱- داده‌های فازی دوزنقه‌ای مربوط به سهام شرکت‌های شاخص صنعتی داو جونز.

Table 1- Trapezoidal fuzzy data related to the stocks of Dow Jones Industrial Index companies.

Asset	Trapezoidal Fuzzy Data	Asset	Trapezoidal Fuzzy Data
GS	(-5.23, -0.75, 10.43, 17.13)	AMZN	(-3.87, -0.15, 8.55, 13.53)
UNH	(-17.22, -8.64, 6.36, 12.79)	HON	(-6.2, -2.61, 7.07, 13.16)
MSFT	(-7.54, -3.09, 4.41, 7.46)	BA	(-16.37, -9.42, 5.27, 13.01)

جدول ۱- ادامه.

Table 1- Continued.

Asset	Trapezoidal Fuzzy Data	Asset	Trapezoidal Fuzzy Data
HD	(-13.57, -6.09, 5.49, 9.6)	PG	(-6.95, -2.84, 4.79, 8.32)
V	(-3.77, -0.97, 5.26, 8.69)	JNJ	(-8.87, -4.72, 3.67, 7.91)
SHW	(-15.79, -7.33, 8.9, 16.67)	CVX	(-12.19, -6.03, 4.88, 9.62)
CAT	(-11.06, -4.43, 6.53, 10.85)	MMM	(-14.54, -5.49, 14.07, 24.58)
CRM	(-11.05, -4.09, 7.92, 12.98)	NVDA	(-3.33, 3.28, 18.41, 26.94)
MCD	(-5.13, -2.5, 4.36, 8.6)	DIS	(-9.5, -3.74, 11.22, 20.42)
AMGN	(-12.6, -6.61, 6, 12.62)	WMT	(-1.74, 1.47, 8.53, 12.37)
AXP	(-3.47, 0.34, 8.3, 12.46)	MRK	(-10.25, -5.51, 2.87, 6.5)
JPM	(-6.14, -1.49, 7.88, 12.59)	NKE	(-20.38, -11.38, 4.38, 11.13)
IBM	(-13.44, -5.16, 8.26, 13.42)	KO	(-9.46, -4.42, 4.47, 8.32)
AAPL	(-5.02, -1.11, 7.66, 12.52)	CSCO	(-5.08, -1.68, 4.82, 7.92)
TRV	(-9.76, -3.75, 6.21, 10.16)	VZ	(-11.18, -5.15, 5.75, 10.62)

با توجه به داده‌های ارائه شده در جدول ۱، در این بخش به بهینه‌سازی مدل پیشنهادی پرداخته می‌شود. در این تحقیق، به منظور حل مدل بهینه‌سازی و تعیین تخصیص بهینه دارایی‌ها، از نرم‌افزار *GAMS* استفاده می‌شود که یکی از ابزارهای بسیار قوی برای حل مسائل پیچیده بهینه‌سازی می‌باشد و دارای قابلیت‌های پیشرفته‌ای برای حل مدل‌های ریاضی است. در مدل پیشنهادی، از سطح اطمینان $\alpha = 0.05$ جهت تخصیص بهینه وزن دارایی‌ها استفاده شده است. علاوه بر این، مقدار R برابر با ۱۰٪ در نظر گرفته شده است که به عنوان حداقل بازده مورد انتظار برای سبد سرمایه‌گذاری عمل می‌کند. این مقدار حداقل بازده تضمین می‌کند که سرمایه‌گذاران به اندازه کافی از سرمایه‌گذاری‌های خود بازده دریافت کنند و در عین حال ریسک‌های مرتبط با سبد سرمایه‌گذاری را به طور معقول مدیریت کنند. همچنین در این مدل، برای کنترل ریسک و تنوع سبد سرمایه‌گذاری، محدودیت‌های سقف و کف بر اساس مقادیر $u_i = 0.5$ و $l_i = 0.1$ تنظیم شده‌اند. این به آن معناست که میزان سرمایه‌گذاری در هر دارایی باید بین ۱۰٪ و ۵۰٪ از کل سبد سرمایه‌گذاری قرار گیرد. این محدودیت‌ها اطمینان می‌دهند که هیچ کدام از دارایی‌ها در سبد سرمایه‌گذاری سهم بیش از حدی از کل سرمایه را به خود اختصاص ندهند، و به این ترتیب از تمرکز بیش از حد سرمایه بر یک دارایی خاص جلوگیری می‌شود. در نهایت برای ارزیابی عملکرد مدل، نتایج بهینه‌سازی برای سه مقدار مختلف K بررسی می‌شوند که هر کدام نمایانگر تعداد دارایی‌های انتخابی در سبد هستند. به طور خاص، مدل برای $K = 3, 5, 7$ اجرا می‌شود. این مقادیر مختلف برای K به این منظور انتخاب شده‌اند که بتوان تاثیر تعداد دارایی‌ها در سبد و تنوع سبد سرمایه‌گذاری را بررسی کرد. نتایج حاصل از حل مدل پیشنهادی در جدول ۲ نمایش داده شده است:

جدول ۲- نتایج حاصل از تخصیص بهینه وزن به دارایی‌ها مبتنی بر مدل پیشنهادی تحت سناریوهای مختلف.

Table 2- The results of the optimal weight allocation to assets based on the proposed model under different scenarios.

No.	k	Objective Function	x_1	x_5	x_{11}	x_{14}	x_{16}	x_{23}	x_{25}
			GS	V	AXP	AAPL	AMZN	NVDA	WMT
Scenario 1	k = 3	-2.510	-	-	0.1	-	-	0.5	0.4
Scenario 2	k = 5	-2.135	0.1	-	0.1	-	0.1	0.5	0.2
Scenario 3	k = 7	-1.437	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.4	0.1

بر اساس نتایج جدول ۲، تخصیص وزن‌های بهینه در سناریوهای مختلف نشان می‌دهد که *NVDA (NVIDIA)* به طور مداوم بیشترین سهم از سبد سرمایه‌گذاری را در تمامی سناریوها داشته است. این نتیجه کاملاً منطقی است، چرا که از داده‌های ارائه شده در جدول ۱ می‌توان پتانسیل رشد بالای این نماد را مشاهده کرد. به عبارت دیگر، بر اساس تحلیل‌های موجود، *NVDA* دارای بازدهی بالاتر و پتانسیل رشد بهتری نسبت به سایر دارایی‌های موجود در سبد است. این امر به ویژه در زمینه‌های فناوری و میکروالکترونیک که این نماد در آن‌ها فعال است، بیشتر نمایان می‌شود. شرکت‌هایی که در حوزه‌های نوآورانه مانند هوش مصنوعی و پردازش گرافیکی فعالیت می‌کنند، معمولاً می‌توانند پتانسیل رشد بیشتری از خود نشان دهند.

در ادامه، باید ذکر کرد که نتایج و آزمایشات نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی ما از عملکرد بسیار خوبی برخوردار است. این مدل نه تنها نتایج منطقی و کاربردی ارائه می‌دهد، بلکه توانایی ساخت سبدهای سرمایه‌گذاری بهینه را در سناریوهای گوناگون به راحتی داراست. این ویژگی باعث می‌شود که مدل پیشنهادی در شرایط مختلف و با تنوع تعداد دارایی‌ها به طور موثری عمل کرده و به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که تخصیص منابع

خود را به‌طور پویا و بر اساس شرایط متغیر بازار تنظیم کنند. این ویژگی به ویژه در دنیای امروز که شرایط بازار همیشه در حال تغییر است، بسیار ارزشمند است و به سرمایه‌گذاران این فرصت را می‌دهد تا تصمیمات بهینه‌تری اتخاذ کنند. به‌طور کلی، این مدل با استفاده از $CVaR$ تحت نظریه اعتبار فازی و محدودیت‌های کاربردی به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که سبدهای سرمایه‌گذاری متنوع و پایدار ایجاد کنند و ریسک‌های موجود را به‌طور موثری کاهش دهند. با استفاده از این رویکرد، سرمایه‌گذاران قادر خواهند بود تصمیمات سرمایه‌گذاری آگاهانه‌تری اتخاذ کنند و به این ترتیب، سبد سرمایه‌گذاری خود را به‌طور بهینه و با کمترین ریسک ممکن مدیریت نمایند.

۵- بحث و بینش‌های مدیریتی

در این پژوهش از مدل $CVaR$ تحت نظریه اعتبار فازی جهت تشکیل سبد سرمایه‌گذاری در شرایط عدم قطعیت، معرفی و استفاده می‌شود. نتایج حاصل از این مدل ریاضی بر روی سهام شرکت‌های $DJIA$ ، نشان‌دهنده تخصیص‌های بهینه منابع در سناریوهای گوناگون می‌باشد. این مدل در شبیه‌سازی ریسک‌ها و بازده‌ها با دقت و اثربخشی بالا عمل کرده و توانسته است تخصیص‌های دقیق و منطقی را ارائه دهد که به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که تصمیمات آگاهانه‌تری اتخاذ کنند. بر اساس نتایج به‌دست آمده و تجزیه و تحلیل‌های صورت گرفته، تخصیص‌های پیشنهادی در مدل کاملاً منطقی و مطابق با انتظارات بازار و شرایط اقتصادی به نظر می‌رسد. این تطابق نتایج با واقعیت‌های بازار، نشان‌دهنده قدرت مدل در شبیه‌سازی شرایط عدم قطعیت و ریسک‌های بالقوه است، که این خود به افزایش اطمینان سرمایه‌گذاران در تصمیم‌گیری‌های مالی کمک می‌کند. مزایای این مدل ریاضی در انعطاف‌پذیری و دقت بالای آن نهفته است. در نتیجه این مدل به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که سبد سرمایه‌گذاری خود را به‌طور پویا و مستمر و مطابق با تغییرات لحظه‌ای بازار بهینه کنند. علاوه بر این، مدل پیشنهادی تنها به فضای مالی محدود نمی‌شود و توانایی به‌کارگیری در سایر زمینه‌های تصمیم‌گیری و بهینه‌سازی را نیز دارد. به‌عنوان مثال، می‌توان از این مدل در مدیریت منابع انسانی برای تخصیص بهینه نیروی کار در سازمان‌ها، تخصیص منابع در پروژه‌های صنعتی و حتی مدیریت ریسک در پروژه‌های بزرگ استفاده کرد. این ویژگی‌ها مدل را به یک ابزار چندمنظوره تبدیل کرده که می‌تواند در شرایط مختلف و برای اهداف گوناگون به کار رود.

از نظر بینش‌های کاربردی و مدیریتی، این مدل به مدیران و سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که با درک بهتری از ریسک‌های احتمالی و فرصت‌های موجود، استراتژی‌های بهینه‌تری برای تخصیص منابع و سرمایه‌گذاری اتخاذ کنند. همان‌طور که مطرح شد، یکی از ویژگی‌های برجسته این مدل، توانایی آن در مدیریت ریسک‌ها و شبیه‌سازی بازده‌ها در شرایط عدم قطعیت است که به مدیران اجازه می‌دهد به‌طور موثری تصمیمات مالی خود را با در نظر گرفتن تمامی ریسک‌های موجود اتخاذ کنند. در واقع، این مدل می‌تواند به‌عنوان یک ابزار حیاتی برای ارزیابی و تحلیل ریسک‌های غیرقابل پیش‌بینی در بازارهای مالی عمل کند و به سرمایه‌گذاران این امکان را می‌دهد که بر اساس شواهد و داده‌های به‌دست آمده، تخصیص‌های بهینه را به‌طور مستمر و پویا انجام دهند. این قابلیت به ویژه در شرایط بازار ناپایدار و در مواجهه با نااطمینانی‌های اقتصادی که ممکن است بر تصمیمات مالی تأثیر بگذارند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از دیدگاه نظری، این مدل اهمیت استفاده از نظریه اعتبار فازی را در تحلیل داده‌های پیچیده و نادقیق برجسته می‌کند. این رویکرد به‌ویژه برای مدل‌سازی عدم قطعیت‌ها و ریسک‌های احتمالی در بازارهای مالی مفید است، چرا که به‌طور موثری امکان تحلیل داده‌های غیرقطعی و نادرست را فراهم می‌آورد. این مدل می‌تواند به مدیران کمک کند تا به‌طور دقیق‌تری منابع خود را تخصیص دهند و تصمیمات استراتژیک‌تری در زمینه مدیریت ریسک اتخاذ کنند. در نتیجه، این بینش‌ها می‌توانند به توسعه مدل‌های جدید در مدیریت ریسک و بهینه‌سازی منابع کمک کنند و در نهایت به افزایش کارایی و پایداری تصمیمات در دنیای پیچیده و ناپایدار اقتصادی منجر شوند.

۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری مبتنی بر مدل $CVaR$ تحت نظریه اعتبار فازی معرفی و سپس بر روی سهام شرکت‌های $DJIA$ پیاده‌سازی شد. نتایج حاصل از مدل نشان داد که این رویکرد به‌طور موثر قادر است تخصیص‌های بهینه منابع را در سناریوهای مختلف ایجاد کند. استفاده از اعداد فازی دوزنقه‌ای در این مدل به‌ویژه در تحلیل ریسک‌ها و بازده‌ها توانسته است عدم قطعیت‌های موجود در بازار را به‌طور موثری مدل‌سازی کند. این مدل با استفاده از محدودیت‌های کاربردی همچون سقف و کف و کاردینالیتی، به مدیران این امکان را می‌دهد که منابع خود را به‌طور بهینه و پایدار تخصیص دهند و از ریسک‌های بزرگ جلوگیری کنند. نتایج حاصل از تخصیص وزن‌های بهینه در سناریوهای مختلف نشان می‌دهد که $NVDA$ به‌طور مداوم بیشترین سهم از سبد سرمایه‌گذاری را در تمامی سناریوها به خود اختصاص داده است. این نتیجه کاملاً منطقی

است، زیرا از داده‌های تاریخی سال ۲۰۲۴ می‌توان پتانسیل رشد بالای این نماد را مشاهده کرد. به‌طور کلی، مدل پیشنهادی عملکرد خوبی داشت و در مدیریت ریسک و بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری در شرایط مختلف بازار به‌طور موثری عمل کرد.

با وجود این‌که این تحقیق سهم قابل توجهی در توسعه مدل‌های بهینه‌سازی سبدهای سرمایه‌گذاری و استفاده از نظریه اعتبار فازی در تحلیل ریسک‌ها ایفا کرده است، همچنان زمینه‌های تحقیقاتی بسیاری باقی‌مانده است که پژوهشگران می‌توانند در تحقیقات آتی به آن‌ها بپردازند. برای پیشنهادات آتی، ابتدا می‌توان از سایر اعداد فازی مانند اعداد فازی گوسی یا دیگر انواع فازی برای برآورد دقیق‌تر عدم قطعیت‌ها استفاده کرد. استفاده از این اعداد فازی می‌تواند تحلیل‌های پیچیده‌تری را فراهم آورد و دقت مدل را در شبیه‌سازی ریسک‌ها و بازده‌ها افزایش دهد. به‌طور خاص، این تغییرات می‌توانند موجب بهبود نتایج مدل در شبیه‌سازی شرایط پیچیده‌تر و نوسانات بیشتر بازار شوند. علاوه بر این، این مدل می‌تواند به‌طور گسترده‌تر در بازارهای مالی جهانی، به‌ویژه در بازارهای نوظهور و بازارهای غیر از بورس ایالات متحده پیاده‌سازی شود. این امر به مدیران و سرمایه‌گذاران کمک خواهد کرد تا از مدل در تحلیل سبدهای سرمایه‌گذاری در بازارهای مختلف بهره‌برداری کنند و بتوانند تصمیمات بهتری با توجه به ویژگی‌های خاص هر بازار اتخاذ نمایند. همچنین، در تحقیقات آتی می‌توان سایر سنج‌های ریسک را تحت نظریه اعتبار فازی مدل‌سازی کرده و از آن‌ها برای تشکیل سبد سرمایه‌گذاری استفاده نمود. علاوه بر این، امکان مقایسه عملکرد این سنج‌ها با یکدیگر نیز وجود دارد. این مقایسه می‌تواند چشم‌انداز جدیدی در زمینه بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه دهد و به تحلیل دقیق‌تر و جامع‌تر ریسک‌های مختلف کمک کند. ترکیب نظریه اعتبار فازی با سنج‌های ریسک مختلف می‌تواند باعث افزایش دقت در شبیه‌سازی‌های ریسک و بهبود فرآیندهای تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاری در شرایط پیچیده و ناپایدار بازار شود. در نهایت، در راستای افزایش دقت مدل، می‌توان محدودیت‌های جدیدی مانند محدودیت‌های نقدینگی یا هزینه‌های معاملاتی را وارد مدل کرد. این تغییرات می‌توانند مدل را برای شرایط پیچیده‌تر و پروژه‌های بزرگ‌تر قابل اجرا کنند و در نهایت به بهینه‌سازی منابع و کاهش ریسک‌ها در پروژه‌های اقتصادی و مالی مختلف کمک کنند.

منابع

- [1] Keller, C., & Siegrist, M. (2006). Investing in stocks: The influence of financial risk attitude and values-related money and stock market attitudes. *Journal of economic psychology*, 27(2), 285–303. <https://doi.org/10.1016/j.joep.2005.07.002>
- [2] Shane, S. (2012). The importance of angel investing in financing the growth of entrepreneurial ventures. *The quarterly journal of finance*, 2(2), 1250009. <https://doi.org/10.1142/S2010139212500097>
- [3] Mansini, R., Ogryczak, W., & Speranza, M. G. (2014). Twenty years of linear programming based portfolio optimization. *European journal of operational research*, 234(2), 518–535. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.08.035>
- [4] Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: practical challenges and current trends. *European journal of operational research*, 234(2), 356–371. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.060>
- [5] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77–91. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>
- [6] Ghanbari, H., Safari, M., Ghousi, R., Mohammadi, E., & Nakharutai, N. (2023). Bibliometric analysis of risk measures for portfolio optimization. *Accounting*, 9, 95–108. <https://doi.org/10.5267/j.ac.2022.12.003>
- [7] Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, 2(3), 21–42. <https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038>
- [8] Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking & finance*, 26(7), 1443–1471. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(02\)00271-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6)
- [9] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338–353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- [10] Liu, B. (2004). *Uncertainty theory: An introduction to its axiomatic foundation*. Physica-verlag, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-39987-2>
- [11] Liu, G. (2007). *Uncertainty theory*. AI & Society. https://doi.org/10.1007/978-3-540-73165-8_5
- [12] Mohebbi, N., & Najafi, A. A. (2018). Credibilistic multi-period portfolio optimization based on scenario tree. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*, 492, 1302–1316. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.11.058>
- [13] Deng, X., Zhao, J., & Li, Z. (2018). Sensitivity analysis of the fuzzy mean-entropy portfolio model with transaction costs based on credibility theory. *International journal of fuzzy systems*, 20(1), 209–218. <https://doi.org/10.1007/s40815-017-0330-1>
- [14] Gupta, P., Mehlaawat, M. K., & Khan, A. Z. (2021). Multi-period portfolio optimization using coherent fuzzy numbers in a credibilistic environment. *Expert systems with applications*, 167, 114135. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.114135>
- [15] Mehlaawat, M. K., Gupta, P., & Khan, A. Z. (2021). Multiobjective portfolio optimization using coherent fuzzy numbers in a credibilistic environment. *International journal of intelligent systems*, 36(4), 1560–1594. <https://doi.org/10.1002/int.22352>
- [16] Liu, N., Chen, Y., & Liu, Y. (2018). Optimizing portfolio selection problems under credibilistic CVaR criterion. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, 34(1), 335–347. <https://doi.org/10.3233/JIFS-171298>